

© International Baccalaureate Organization 2023

All rights reserved. No part of this product may be reproduced in any form or by any electronic or mechanical means, including information storage and retrieval systems, without the prior written permission from the IB. Additionally, the license tied with this product prohibits use of any selected files or extracts from this product. Use by third parties, including but not limited to publishers, private teachers, tutoring or study services, preparatory schools, vendors operating curriculum mapping services or teacher resource digital platforms and app developers, whether fee-covered or not, is prohibited and is a criminal offense.

More information on how to request written permission in the form of a license can be obtained from <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organisation du Baccalauréat International 2023

Tous droits réservés. Aucune partie de ce produit ne peut être reproduite sous quelque forme ni par quelque moyen que ce soit, électronique ou mécanique, y compris des systèmes de stockage et de récupération d'informations, sans l'autorisation écrite préalable de l'IB. De plus, la licence associée à ce produit interdit toute utilisation de tout fichier ou extrait sélectionné dans ce produit. L'utilisation par des tiers, y compris, sans toutefois s'y limiter, des éditeurs, des professeurs particuliers, des services de tutorat ou d'aide aux études, des établissements de préparation à l'enseignement supérieur, des fournisseurs de services de planification des programmes d'études, des gestionnaires de plateformes pédagogiques en ligne, et des développeurs d'applications, moyennant paiement ou non, est interdite et constitue une infraction pénale.

Pour plus d'informations sur la procédure à suivre pour obtenir une autorisation écrite sous la forme d'une licence, rendez-vous à l'adresse <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organización del Bachillerato Internacional, 2023

Todos los derechos reservados. No se podrá reproducir ninguna parte de este producto de ninguna forma ni por ningún medio electrónico o mecánico, incluidos los sistemas de almacenamiento y recuperación de información, sin la previa autorización por escrito del IB. Además, la licencia vinculada a este producto prohíbe el uso de todo archivo o fragmento seleccionado de este producto. El uso por parte de terceros —lo que incluye, a título enunciativo, editoriales, profesores particulares, servicios de apoyo académico o ayuda para el estudio, colegios preparatorios, desarrolladores de aplicaciones y entidades que presten servicios de planificación curricular u ofrezcan recursos para docentes mediante plataformas digitales—, ya sea incluido en tasas o no, está prohibido y constituye un delito.

En este enlace encontrará más información sobre cómo solicitar una autorización por escrito en forma de licencia: <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

Mathematik: Analyse und Ansätze

Grundstufe

2. Klausur

9. Mai 2023

Zone A Nachmittag | Zone B Vormittag | Zone C Nachmittag

Prüfungsnummer des Kandidaten

1 Stunde 30 Minuten

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Hinweise für die Kandidaten

- Schreiben Sie Ihre Prüfungsnummer in die Felder oben.
- Öffnen Sie diese Prüfungsklausur erst nach Aufforderung.
- Für diese Klausur wird ein grafikfähiger Taschenrechner (GTR) benötigt.
- Teil A: Beantworten Sie alle Fragen. Die Antworten müssen in die dafür vorgesehenen Felder geschrieben werden.
- Teil B: Beantworten Sie alle Fragen im beigefügten Answerheft. Tragen Sie Ihre Prüfungsnummer auf der Vorderseite des Answerhefts ein und heften Sie es mit dieser Prüfungsklausur und Ihrem Deckblatt mit Hilfe der beiliegenden Klammer zusammen.
- Sofern in der Frage nicht anders angegeben, sollten alle numerischen Antworten entweder exakt oder auf drei signifikante Stellen genau angegeben werden.
- Für diese Klausur ist ein unverändertes Exemplar der **Formelsammlung zu Mathematik: Analyse und Ansätze** erforderlich.
- Die Höchstpunktzahl für diese Prüfungsklausur ist **[80 Punkte]**.



Für eine richtige Antwort ohne Rechenweg wird möglicherweise nicht die volle Punktzahl anerkannt. Die Antworten müssen durch einen Rechenweg bzw. Erläuterungen ergänzt werden. Lösungen, die mit einem grafikfähigen Taschenrechner (GTR) berechnet werden, sollten von einem passenden Rechenweg begleitet werden. Wenn Sie zum Beispiel Graphen zum Finden einer Lösung verwenden, sollten Sie diese als Teil Ihrer Antwort skizzieren. Bei falschen Antworten können ggf. Punkte für die richtige Methode vergeben werden, sofern dies durch einen schriftlichen Rechenweg erkennbar wird. Deshalb sollten Sie alle Rechenwege offenlegen.

Teil A

Beantworten Sie **alle** Fragen. Die Antworten müssen in die dafür vorgesehenen Felder geschrieben werden. Bei Bedarf kann der Rechenweg unterhalb der Zeilen fortgesetzt werden.

1. [Maximale Punktzahl: 5]

Ein Botaniker führt ein Experiment zum Wachstum von Pflanzen durch.

Die Höhe der Pflanzen wird an sieben verschiedenen Tagen gemessen.

Die folgende Tabelle zeigt die Dauer d des Experiments in Tagen, und die durchschnittliche Höhe h (in cm) der Pflanzen an jedem dieser Tage.

Dauer in Tagen (d)	2	5	13	24	33	37	42
Durchschnittshöhe (h)	10	16	30	59	76	79	82

(a) Die Regressionsgerade von h auf d für diese Daten kann in der Form $h = ad + b$ geschrieben werden.

Finden Sie die Werte von a und b . [2]

(b) Notieren Sie den Wert des Pearsonschen Produkt-Moment-Korrelationskoeffizienten r . [1]

(c) Schätzen Sie die durchschnittliche Höhe der Pflanzen nach 20 Tagen Dauer des Experiments mit Hilfe Ihrer Regressionsgeraden. [2]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

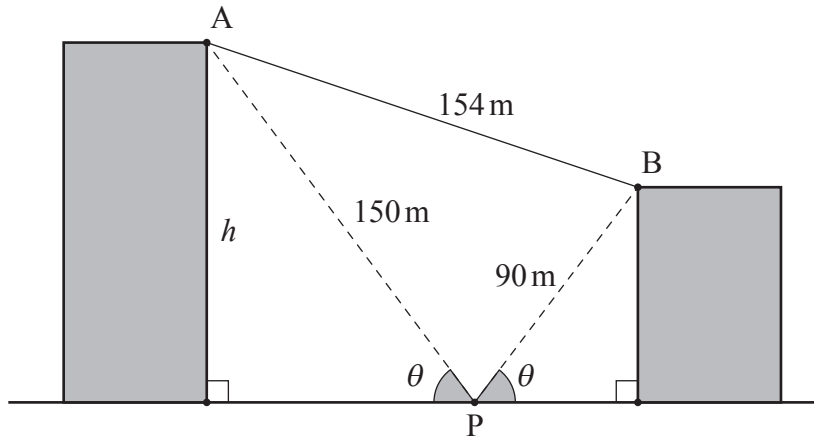


2. [Maximale Punktzahl: 6]

Das folgende Diagramm zeigt zwei ebenerdig stehende Gebäude.

Vom Punkt P auf dem Boden direkt zwischen den beiden Gebäuden beträgt der Höhenwinkel zur Oberkante der beiden Gebäude θ .

Zeichnung nicht maßstabsgerecht



Die Entfernung zwischen dem Punkt P und dem Punkt A an der Spitze des höheren Gebäudes beträgt 150 Meter.

Die Entfernung zwischen dem Punkt P und dem Punkt B an der Spitze des niedrigeren Gebäudes beträgt 90 Meter.

Die Entfernung zwischen A und B beträgt 154 Meter.

- (a) Finden Sie das Maß von $\hat{A}PB$. [3]
- (b) Finden Sie die Höhe h des höheren Gebäudes. [3]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



3. [Maximale Punktzahl: 5]

Die Menge eines Medikaments in Milligramm (mg) im Körper eines Patienten kann durch die Funktion $A(t) = 500e^{-kt}$ modelliert werden, wobei k eine positive Konstante und t die Zeit in Stunden nach Verabreichung der ersten Dosis ist.

(a) Notieren Sie für $t = 0$ die Menge des Medikaments im Körper des Patienten. [1]

Nach drei Stunden ist die Menge des Medikaments im Körper des Patienten auf 280 mg abgesunken.

(b) Finden Sie den Wert von k . [2]

Die zweite Dosis wird T Stunden nach der ersten verabreicht, wenn die Menge des Medikaments im Körper des Patienten 140 mg beträgt.

(c) Finden Sie den Wert von T . [2]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



4. [Maximale Punktzahl: 8]

Das Gewicht W (in Gramm) der in einer Fabrik verpackten Reispackungen kann durch eine Normalverteilung mit einem Mittelwert von 204 Gramm und einer Standardabweichung von 5 Gramm modelliert werden.

(a) Eine Packung Reis wird nach dem Zufallsprinzip ausgewählt.

Finden Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sie mehr als 210 Gramm wiegt. [2]

Nach diesem Modell wiegen 80% der Reispackungen zwischen w Gramm und 210 Gramm.

(b) Finden Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Reispackung weniger als w Gramm wiegt. [2]

(c) Finden Sie den Wert von w . [2]

(d) Zehn Reispackungen werden nach dem Zufallsprinzip ausgewählt.

Finden Sie die Wahrscheinlichkeit, dass genau eine der Packungen weniger als w Gramm wiegt. [2]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



5. [Maximale Punktzahl: 7]

Die Entwicklung von $(x + h)^8$, mit $h > 0$, kann als $x^8 + ax^7 + bx^6 + cx^5 + dx^4 + \dots + h^8$ geschrieben werden, wobei $a, b, c, d, \dots \in \mathbb{R}$.

(a) Finden Sie einen von h abhängigen Ausdruck für

(i) a ;

(ii) b ;

(iii) d .

[4]

(b) Finden Sie den Wert von h unter der Voraussetzung, dass a, b , und d die ersten drei Terme einer geometrischen Folge sind.

[3]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

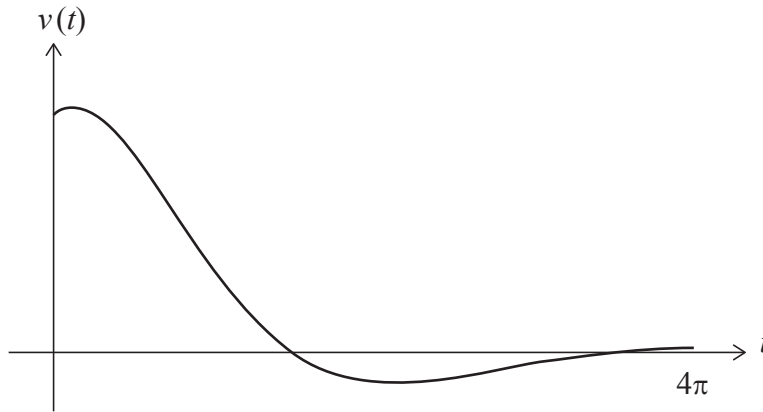
.....



6. [Maximale Punktzahl: 6]

Ein Teilchen bewegt sich so auf einer geraden Linie, dass seine Geschwindigkeit, v (in m s^{-1}) zum Zeitpunkt t Sekunden durch $v(t) = 4e^{-\frac{t}{3}} \cos\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ für $0 \leq t \leq 4\pi$ beschrieben wird.

Das folgende Diagramm zeigt den Graphen von v .



Sei t_1 der erste Zeitpunkt, an dem die **Beschleunigung** des Teilchens Null ist.

- (a) Finden Sie den Wert von t_1 . [2]

Sei t_2 der **zweite** Zeitpunkt, an dem sich das Teilchen wieder in absoluter Ruhe befindet.

- (b) Finden Sie den Wert von t_2 . [2]

- (c) Finden Sie die Entfernung, die das Teilchen zwischen den Zeitpunkten $t = t_1$ und $t = t_2$ zurücklegt. [2]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Bitte schreiben Sie **nicht** auf dieser Seite.

Antworten, die auf dieser Seite geschrieben
werden, werden nicht bewertet.



Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

Teil B

Beantworten Sie **alle** Fragen im beigefügten Antwortheft. Bitte beginnen Sie jede Frage auf einer neuen Seite.

7. [Maximale Punktzahl: 15]

Betrachten Sie die Funktion $h(x) = \sqrt{4x-2}$ für $x \geq \frac{1}{2}$.

- (a) (i) Finden Sie $h^{-1}(x)$ die Inverse von $h(x)$, und geben Sie ihre Definitionsmenge an.
(ii) Notieren Sie den Wertebereich von $h^{-1}(x)$. [5]
- (b) Der Graph von h schneidet den Graphen von h^{-1} in zwei Punkten.
Finden Sie die x -Koordinaten dieser beiden Punkte. [3]
- (c) Finden Sie den Inhalt der Fläche, die vom Graphen von h und dem Graphen von h^{-1} eingeschlossen wird. [2]
- (d) Finden Sie $h'(x)$. [2]
- (e) Finden Sie den Wert von x für den die Graphen von h und h^{-1} die gleiche Steigung aufweisen. [3]

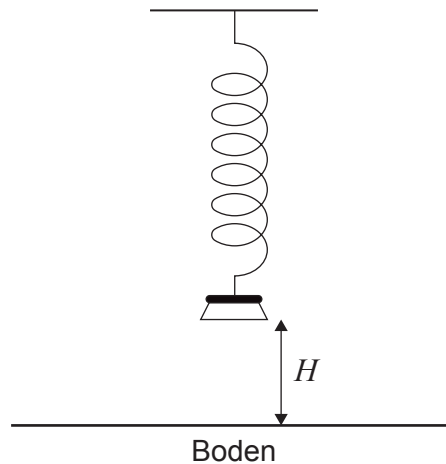


Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

8. [Maximale Punktzahl: 13]

Ein an einer Feder hängendes Gewicht wird nach unten gezogen und losgelassen, so dass es sich vertikal auf und ab bewegt.

Die Höhe H der Unterseite des Gewichts über dem Boden (in Meter) kann durch die Funktion $H(t) = a \cos(7,8t) + b$, mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $0 \leq t \leq 10$ modelliert werden. Dabei ist t die Zeit in Sekunden nach dem Loslassen des Gewichts.



(a) Finden Sie die Periodendauer der Funktion.

[2]

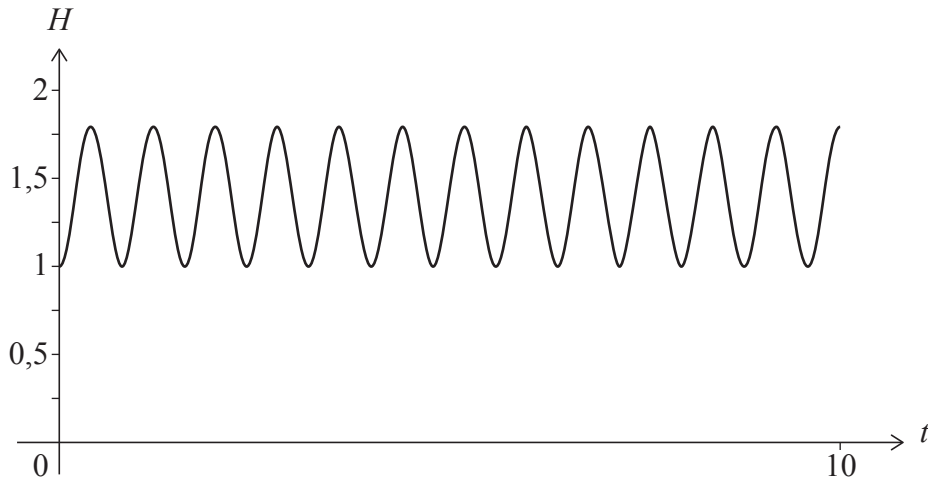
(Auf die vorliegende Frage wird auf der nächsten Seite weiter eingegangen)



Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

(Fortsetzung Frage 8)

Das Gewicht wird losgelassen, wenn die Höhe seiner Unterseite über dem Boden ihren kleinsten Wert von 1 Meter hat. Es erreicht eine maximale Höhe von 1,8 Meter über dem Boden. Der Graph von H ist im folgenden Diagramm dargestellt.



(b) Finden Sie die Werte von

(i) a ;

(ii) b .

[3]

(c) Finden Sie die Anzahl, wie oft das Gewicht in den ersten fünf Sekunden seiner Bewegung seine maximale Höhe erreicht.

[2]

(d) Finden Sie den ersten Zeitpunkt, an dem die Unterseite des Gewichts eine Höhe von 1,5 Metern erreicht.

[2]

Eine Kamera ist so eingestellt, dass sie das Gewicht zu einem zufälligen Zeitpunkt während der ersten fünf Sekunden seiner Bewegung fotografiert.

(e) Finden Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Höhe der Unterseite des Gewichts zum Zeitpunkt des Fotos größer ist als 1,5 Meter.

[4]



12EP11

Bitte umblättern

Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

9. [Maximale Punktzahl: 15]

Eine Tasche enthält n Kugeln. Es ist bekannt, dass zehn der Kugeln grün und die restlichen rot sind. Die Kugeln werden eine nach der anderen ohne Zurücklegen aus der Tasche gezogen.

- (a) Finden Sie, abhängig von n , die Wahrscheinlichkeit, dass
- (i) die erste gezogene Kugel grün ist;
 - (ii) die ersten beiden Kugeln grün sind. [3]

Für die folgenden Teile dieser Aufgabe sei $n = 25$.

- (b) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, dass die ersten beiden Kugeln rot sind 0,35 beträgt. [2]
- (c) Finden Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die ersten drei Kugeln alle rot sind. [2]
- (d) Finden Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine der ersten drei Kugeln grün ist. [2]

Bei einem Spiel werden **vier** Kugeln nacheinander und ohne Zurücklegen aus dem Beutel mit 25 Kugeln gezogen. Die Spieler erhalten eine unterschiedliche Punktzahl, je nachdem, wann sie die erste grüne Kugel ziehen. Am Ende jeder Spielrunde werden die vier Kugeln wieder in den Beutel gelegt.

Ein Spieler erhält null Punkte, wenn er keine grüne Kugel zieht, oder wenn er die erste grüne Kugel bei seinem ersten oder zweiten Zug zieht.

Ein Spieler erhält 10 Punkte, wenn er die erste grüne Kugel bei seinem dritten Zug zieht, und 50 Punkte, wenn er die erste grüne Kugel bei seinem vierten Zug zieht.

Millie spielt k Runden dieses Spiels. Sie berechnet ihren Punktestand, indem sie ihre Punkte aus jeder Spielrunde addiert.

- (e) Finden Sie den kleinsten Wert von k so, dass Millies erwartete Punktzahl größer als 100 ist. [6]

Quellenangaben:

© International Baccalaureate Organization 2023

